# Leçon 245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de C . Exemples et applications.

## Développements :

Formule des compléments, Densité des polynômes orthogonaux.

## Bibliographie :

Pabion, Queffelec Analyse complexe, Tauvel, Amar et Matheron,

## Rapport du jury 2017 :

Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète). Les résultats autour de l'analyticité, ou encore le principe du maximum, le principe des zéros isolés, sont bien sûr cruciaux. Le lemme de Schwarz est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité. Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon offre beaucoup de possibilités, notamment en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de Riemann est par exemple un développement de très bon niveau mais qui nécessite une bonne maîtrise.

## Rapport du jury 2018 :

Les résultats autour de l'analyticité, ou encore le principe du maximum, le principe des zéros isolés, sont bien sûr cruciaux. Le lemme de Schwarz est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité. La notation $\int_\gamma f(z)dz$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Par ailleurs, même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète). La leçon invite également à présenter le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et des exemples de fonctions célèbres (par exemple la fonction Gamma, la fonction zêta, ...). Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon offre beaucoup de possibilités, notamment en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de Riemann est par exemple un développement de très bon niveau mais qui nécessite une bonne maîtrise.

**Remarque 1.** *Cadre : $\Omega$ ouvert de $\mathbb{C}$, on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ via $z = x + iy \mapsto (x, y)$ pour les questions de différentiabilité.*

# 1 Définitions de l'holomorphie, exemples

## 1.1 $\mathbb{C}$-dérivabilité et holomorphie

**Définition 2** (Pabion p1)**.** *$\mathbb{C}$ dérivabilité.*

**Définition 3** (2Quef p74)**.** *[Pabion p1] Fonction holomorphe. Fonction entière.*

**Exemple 4** (2Que p75)**.** *[Pabion p3] $z \mapsto z^2$ est holomorphe, $z \mapsto \overline{z}$ n'est pas holomorphe, les fonctions constantes, l'identité.*

**Proposition 5** (2Que p76)**.** *[Pabion p3] $H(\Omega)$ est une algèbre. Règles de calcul usuelles.*

**Exemple 6** (Pabion p3)**.** *Les polynômes sont holomorphes et la dérivée est encore une fonction polynome.*

**Proposition 7** (2Quef p81,82)**.** *Holomorphie et équations de Cauchy-Riemann.*

**Exemple 8** (Pabion p8)**.**

**Contre exemple 9** (OA p57)**.** *$\sqrt{|xy|}$ vérifie Cauchy-Riemann sans différentiabilité.*

**Proposition 10** (Tauvel p61)**.** *Soit $f$ holomorphe. $f$ est constante si et seulement si $Re(f)$ est constante si et seulement si $Im(z)$ est constante si et seulement si $|f|$ est constante si et seulement si $\overline{f}$ est constante.*

**Proposition 11** (Pabion p14)**.** *Une série entière est holomorphe à l'intérieur de son disque ouvert de convergence.*

**Définition 12** (Pabion p17)**.** *Fonction analytique.*

**Proposition 13** (Pabion p17)**.** *Toute fonction analytique est holomorphe.*

**Proposition 14** (Pabion p18)**.** *Ecriture en série de Taylor d'une fonction analytique.*

### 1.2 Exponentielle et logarithme

**Définition 15** (2Que p4)**.** *Exponentielle.*

**Proposition 16** (2Que p5)**.** *exp est holomorphe de dérivée elle-même.*

**Proposition 17** (Pabion p28)**.** *Détermination principale du logarithme.*

**Proposition 18** (Pabion p28)**.** *Log est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ de dérivée l'inverse.*

**Proposition 19** (Amar et M p81)**.** *Détermination principale de la racine k-ème.*

## 2 Formule de Cauchy et conséquences

### 2.1 Formule de Cauchy

**Définition 20** (2Quef p84)**.** *Chemin, chemin fermé. (prendre la définition d'une courbe pour chemin).*

**Définition 21** (2Que p85)**.** *Intégrale curviligne.*

**Exemple 22** (Pabion p34)**.**

**Proposition 23** (2Que p85)**.** *[Pabion p34] Majoration sur le sup des longueurs.*

**Définition 24** (2Quef p86)**.** *Indice d'un point par rapport à une courbe.*

**Proposition 25** (2Que p86)**.** *Propriétés de l'indice.*

**Exemple 26** (2Que p89)**.** *[Pabion p46] Indice pour le cercle.*

**Définition 27** (Pabion p38)**.** *Primitive d'une fonction complexe.*

**Proposition 28** (Pabion p40)**.** *Si $f$ est continue et admet une primitive alors son intégrale est nulle sur tout chemin fermé.*

**Proposition 29** (Pabion p44)**.** *$f$ continue sur un ouvert connexe admet des primitives si et seulement si son intégrale est nulle sur tout chemin fermé.*

**Proposition 30** (Pabion p51)**.** *Si $f$ est holomorphe dans un ouvert étoilé, son intégrale est nulle sur tout chemin fermé.*

**Théorème 31** (Pabion p54)**.** *Formule intégrale de Cauchy sur un disque.*

**Proposition 32** (Pabion p57)**.** *Formule de la moyenne.*

### 2.2 Analycité des fonctions holomorphes et applications

**Proposition 33** (Pabion p35)**.** *$F(z) = \int \phi(u)/(u-z)du$ définit une fonction analytique.*

**Proposition 34** (Pabion p59)**.** *[2Que p96] Toute fonction holomorphe est analytique et expression de ses dérivées.*

**Proposition 35** (2Que p83)**.** *$f$ est holomorphe si et seulement si $f$ est analytique et expression de sa série de Taylor.*

**Proposition 36** (Tauvel p77)**.** *Le rayon de convergence de la série de Taylor de $f$ en $a$ est exactement $d(a, \mathbb{C} - U)$.*

**Application 37** (Pabion p64)**.** *Toute fonction continue d'intégrale nulle sur tout circuit triangulaire est holomorphe.*

**Application 38** (Pabion p64)**.** *La limite d'une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout compact est holomorphe.*

**Théorème 39** (Pabion p65)**.** *Formule intégrale de Cauchy pour un ouvert étoilé. (On utilise le développement de Taylor de $f$).*

**Proposition 40** (2Que p102)**.** *Principe des zéros isolés.*

**Proposition 41** (2Que p103)**.** *Principe de prolongement des identités.*

**Exemple 42** (Tauvel p54)**.** *Il n'existe pas de fonctions holomorphes telles que $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n$.*

**Application 43** (2Que p103)**.** *Calcul de la transformée de Fourier d'une Gaussienne.*

### 2.3 Inégalités de Cauchy et applications

**Théorème 44** (2Que p100)**.** *[Pabion p60-61] Inégalités de Cauchy.*

**Corollaire 45** (2Que p100)**.** *[Amar et M p149][Pabion p61] Théorème de Liouville.*

**Application 46** (Pabion p62)**.** *D'Alembert-Gauss.*

**Proposition 47** (Amar et M p149)**.** *Si $|f(z)| = O(|z|^\alpha)$ alors $f$ est polynômiale de degré $\leq \alpha$.*

**Théorème 48** (2Que p99)**.** *[Amar et M p94] Théorème d'holomorphie des intégrales à paramètres.*

**Application 49** (Amar et M p94)**.** *Holomorphie de $\Gamma$ sur $\{Re(z) > 0$.*

**Proposition 50** (2Que p145)**.** *[Amar et M p91] Théorème de Weierstrass (limite de fonctions holomorphes).*

**Application 51** (Amar et M p91)**.** *[Pabion p142] Définition de $\zeta$. Domaine d'holomorphie.*

## 2.4 Principe du maximum et applications

**Théorème 52** (2Que p105). *Principe du maximum.*

**Proposition 53** (Armar et M p153). *Si $f$ est holomorphe et admet un maximum global sur $U$ connexe alors $f$ est constante.*

**Application 54** (2Que p105). *[Amar et M p156] Lemme de Schwarz.*

# 3 Fonctions méromorphes, exemples et applications

## 3.1 Singularités isolées

**Définition 55** (Pabion p80). *Différentes singularités.*

**Exemple 56** (Pabion p80). *Plusieurs exemples.*

**Définition 57** (Pabion). *Résidu.*

**Proposition 58** (Pabion). *Résidu en une fausse singularité.*

**Proposition 59** (Pabion). *Une fonction admettant une fausse singularité peut être prolongée en une fonction holomorphe.*

**Exemple 60** (Pabion). $\sin z/z$.

**Proposition 61** (2Que p157). *[Pabion] Caractérisation d'un pôle et de l'ordre du pôle.*

**Définition 62** (2Que p156). *[Pabion] Fonction méromorphe.*

**Exemple 63** (2Que p156). $1/sin(z)$.

**Proposition 64** (2Que p158). *[Pabion] Calcul du résidu.*

*Si $f = g/h$ où $g$ et $h$ sont holomorphes au voisinage de $a$ et si $a$ est un zéro simple de $h$ et que $g(a) \neq 0$ alors $a$ est un pôle simple de $f$ de résidu $g(a)/h'(a)$.*

**Exemple 65** (2Que p158). *Un exemple.*

**Théorème 66** (Tauvel p109). *Théorème de dérivation des séries de fonctions méromorphes.*

**Application 67** (Amar et M p148). *Prolongement de $\Gamma$ et $\zeta$.*

## 3.2 Théorème des résidus et applications au calcul d'intégrales

**Théorème 68** (2Que p159). *[Pabion p97] Théorème des résidus.*

**Application 69** (2Que p160). *[Pabion p101] Formule de Kronecker. (Principe de l'argument)*

**Application 70** (2Que p160). *Théorème de Rouché.*

**Application 71** (2Que p161). *Théorème d'Hurwitz.*

**Proposition 72** (2Que p163). *Fractions rationnelles en sin et cos.*

**Proposition 73** (2Que p164). *Fraction rationnelle sans pôles réels.*

**Proposition 74** (2Que p165). *Transformée de Fourier d'une fraction rationnelle.*

**Proposition 75** (2Que p172). *Calcul de somme de séries.*

**Application 76.** *Formule des compléments.*